Électronique Numérique

Simplification des fonctions logiques

POLYTECH
ANGERS

Rémy Guyonneau
Sylvain Pezeril

Quelques définitions

- Fonction booléenne : peut être décrite exhaustivement par sa Table de vérité
- À partir de la table de vérité on peut écrire l'équation de la fonction en utilisant la forme minterme

$$y = \overline{x_1}.\overline{x_2}.x_3 + \overline{x_1}.x_2.x_3 + x_1.\overline{x_2}.\overline{x_3} + x_1.x_2.x_3$$

x_1 x_2 x_3	$y(x_1, x_2, x_3)$
0 0 0	0
0 0 1	1
0 1 0	0
0 1 1	1
1 0 0	1
1 0 1	0
1 1 0	0
1 1 1	1

Simplification algébrique des équations

- Simplifiez l'équation de y ci-contre

$$y = \overline{x_1}.\overline{x_2}.x_3 + \overline{x_1}.x_2.x_3 + x_1.\overline{x_2}.\overline{x_3} + x_1.x_2.x_3$$

Simplification algébrique des équations

- Simplifiez l'équation de y ci-contre

$$y = \overline{x_1}.\overline{x_2}.x_3 + \overline{x_1}.x_2.x_3 + x_1.\overline{x_2}.\overline{x_3} + x_1.x_2.x_3$$
$$y = \overline{x_1}.x_3.(\overline{x_2}+x_2) + x_1.\overline{x_2}.\overline{x_3} + x_1.x_2.x_3$$
$$y = \overline{x_1}.x_3.1 + x_1.\overline{x_2}.\overline{x_3} + x_1.x_2.x_3$$
$$y = \overline{x_1}.x_3 + x_1.\overline{x_2}.\overline{x_3} + x_1.x_2.x_3$$
$$y = x_3.(\overline{x_1} + x_1.x_2) + x_1.\overline{x_2}.\overline{x_3}$$
$$y = x_3.(\overline{x_1} + x_2) + x_1.\overline{x_2}.\overline{x_3}$$
$$y = \overline{x_1}.x_3 + x_2.x_3 + x_1.\overline{x_2}.\overline{x_3}$$

Simplification par la méthode de Karnaugh

- Soit l'équation $\overline{x_1}.\overline{x_2}.x_3 + \overline{x_1}.x_2.x_3$
  - On peut remarquer une simplification facile
    - $\overline{x_1}.\overline{x_2}.x_3 + \overline{x_1}.x_2.x_3 = \overline{x_1}.x_3.(\overline{x_2}+x_2) = \overline{x_1}.x_3$
- Les deux expressions $\overline{x_1}.\overline{x_2}.x_3$ et $\overline{x_1}.x_2.x_3$ sont des mintermes dits adjacents : ils ne diffèrent que par l'état d'une seule des variables

Tableau de Karnaugh

- Le tableau de Karnaugh d'une fonction $y=f(x_1,\ldots,x_n)$ est constitué de 2^n cases représentant tous les mintermes de la fonction y
- Chaque minterme est entouré de ses mintermes adjacents

2 variables

	$\bar{x}$	x
$\bar{z}$	$\bar{x}.\bar{z}$	$x.\bar{z}$
z	$\bar{x}.z$	$x.z$

3 variables

	$\bar{x}_1\bar{x}_2$	$\bar{x}_1x_2$	x_1x_2	$x_1\bar{x}_2$
$\bar{x}_3$				
x_3				

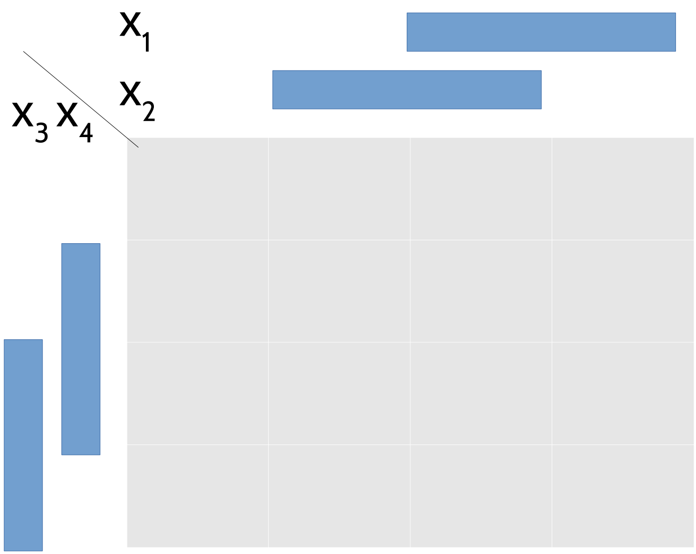
4 variables

	$\bar{x}_1\bar{x}_2$	$\bar{x}_1x_2$	x_1x_2	$x_1\bar{x}_2$
$\bar{x}_3\bar{x}_4$				
$\bar{x}_3x_4$				
x_3x_4				
$x_3\bar{x}_4$				

Tableau de Karnaugh

- Il existe d'autres représentations

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				



Karnaugh – Règles de simplification

- On regroupe par 2, 4 ou 8 (puissance de 2…) le plus de cases à 1
  - Les cases notées X peuvent être considérées comme des 1 ou comme des 0
- Tous les 1 doivent appartenir à au moins un regroupement
  - Un même 1 peut être introduit dans plusieurs regroupement si nécessaire
- Chaque regroupement se décrit par le produit des variable qui ne changent pas d'état dans ce dernier.
- L'équation simplifiée de la fonction correspond à la somme (OU) des équations de chacun des regroupements

Karnaugh – exemple

x_1x_2 / x_3x_4	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	0	1	0
11	1	1	0	1
10	1	1	0	1

Karnaugh – exemple

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	0	1	0
11	1	1	0	1
10	1	1	0	1

$\overline{x_2}.\overline{x_4}$

$x_1.x_2.\overline{x_3}.x_4$

$\overline{x_1}.x_3$

$\overline{x_2}.x_3$

Équation simplifiée : $\overline{x_1}.x_3 + \overline{x_2}.x_3 + x_1.x_2.\overline{x_3}.x_4 + \overline{x_2}.\overline{x_4}$

Karnaugh – exemple

cd \ ab	00	01	11	10
00	0	1	0	0
01	0	1	1	0
11	1	1	1	0
10	0	0	1	0

Karnaugh – exemple

ab / cd	00	01	11	10
00	0	1	0	0
01	0	1	1	0
11	1	1	1	0
10	0	0	1	0

$\bar{a}.b.\bar{c}$

$b.d$

$c.d.\bar{a}$

$a.b.c$

Équation simplifiée : $a.b.c + b.d + \bar{a}.c.d + \bar{a}.b.\bar{c}$

Karnaugh - exemple

A B C	Z
0 0 0	0
0 0 1	0
0 1 0	0
0 1 1	X
1 0 0	X
1 0 1	1
1 1 0	1
1 1 1	1

X : cas impossibles

Karnaugh - exemple

A B C	Z
0 0 0	0
0 0 1	0
0 1 0	0
0 1 1	X
1 0 0	X
1 0 1	1
1 1 0	1
1 1 1	1

X : cas impossibles

A \ BC	00	01	11	10
0	0	0	X	0
1	X	1	1	1

Karnaugh - exemple

A B C	Z
0 0 0	0
0 0 1	0
0 1 0	0
0 1 1	X
1 0 0	X
1 0 1	1
1 1 0	1
1 1 1	1

X : cas impossibles

A \ BC	00	01	11	10
0	0	0	X 0	0
1	X 1	1	1	1

Z = A